

MATEMATYKA 3  
Technikum  
Zakres podstawowy

Wymagania edukacyjne na poszczególne oceny

Wyróżnione zostały następujące wymagania programowe: konieczne (K), podstawowe (P), rozszerzające (R), dopełniające (D) i wykraczające (W). Wymienione poziomy wymagań odpowiadają w przybliżeniu ocenom szkolnym. Nauczyciel, określając te poziomy, powinien zatem sprecyzować, czy opanowania pewnych umiejętności lub wiedzy będzie wymagał na ocenę dopuszczającą (2), dostateczną (3), dobrą (4), bardzo dobrą (5) lub celującą (6).

- Wymagania **konieczne (K)** dotyczą zagadnień elementarnych, stanowiących swego rodzaju podstawę, zatem powinny być opanowane przez każdego ucznia.
- Wymagania **podstawowe (P)** zawierają wymagania z poziomu (K) wzbogacone o typowe problemy o niewielkim stopniu trudności.
- Wymagania **rozszerzające (R)**, zawierające wymagania z poziomów (K) i (P), dotyczą zagadnień bardziej złożonych i nieco trudniejszych.
- Wymagania **dopełniające (D)**, zawierające wymagania z poziomów (K), (P) i (R), dotyczą zagadnień problemowych, trudniejszych, wymagających umiejętności przetwarzania przyswojonych informacji.
- Wymagania **wykraczające (W)** dotyczą zagadnień trudnych, oryginalnych.

Poniżej przedstawiony został podział wymagań na poszczególne oceny szkolne:

ocena dopuszczająca	–	wymagania na poziomie (K)
ocena dostateczna	–	wymagania na poziomie (K) i (P)
ocena dobra	–	wymagania na poziomie (K), (P) i (R)
ocena bardzo dobra	–	wymagania na poziomie (K), (P), (R) i (D)
ocena celująca	–	wymagania na poziomie (K), (P), (R), (D) i (W)

Podział ten należy traktować jedynie jako propozycję. Poniżej przedstawiamy wymagania dla zakresu rozszerzonego. Połączenie wymagań koniecznych i podstawowych, a także rozszerzających i dopełniających pozwoli nauczycielowi dostosować wymagania do specyfiki klasy.

## 1. FUNKCJE WYMIERNE

Poziom **(K)** lub **(P)**

Uczeń otrzymuje ocenę **dopuszczającą** lub **dostateczną**, jeśli:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• szkicuje wykres funkcji <math>f(x) = \frac{a}{x}</math> (w prostych przypadkach także w podanym zbiorze), gdzie <math>a \neq 0</math>, i podaje jej własności (dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności)</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• przesuwa wykres funkcji <math>f(x) = \frac{a}{x}</math>, gdzie <math>a \neq 0</math>, wzdłuż osi <math>OX</math> albo wzdłuż osi <math>OY</math>, podaje jej własności oraz wyznacza równania asymptot jej wykresu</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• dobiera wzór funkcji do jej wykresu</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza wartość wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• upraszcza wyrażenia wymierne w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wykonuje działania na wyrażeniach wymiernych w prostych przypadkach i podaje odpowiednie założenia</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje równania wymierne w prostych przypadkach, podaje i uwzględnia założenia</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania prostych równań i nierówności wymiernych w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań tekstowych</li> </ul>

Poziom **(R)** lub **(D)**

Uczeń otrzymuje ocenę **dobłą** lub **bardzo dobrą**, jeśli opanował poziomy (K) i (P) oraz dodatkowo:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• szkicuje wykres funkcji <math>f(x) = \frac{a}{x}</math>, gdzie <math>a \neq 0</math>, w podanym zbiorze w trudniejszych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wyznacza współczynnik <math>a</math> tak, aby funkcja <math>f(x) = \frac{a}{x}</math> spełniała podane warunki</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• szkicuje wykres funkcji <math>f(x) = \frac{a}{x-p} + q</math>, gdzie <math>x \in R \setminus p</math> i <math>a \neq 0</math>, i wyznacza równania jej asymptot</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznacza równanie hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wykonuje działania na wyrażeniach wymiernych w trudniejszych przypadkach i podaje odpowiednie założenia</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>określa dziedzinę funkcji, w której wzorze występuje ułamek lub pierwiastek</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>przekształca wzory, stosując działania na wyrażeniach wymiernych, wyznacza z danego wzoru wskazaną zmienną</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>rozwiązuje równania wymierne w trudniejszych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>podaje interpretację geometryczną rozwiązania równania wymiernego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystuje wyrażenia wymierne do rozwiązywania trudniejszych zadań tekstowych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań i nierówności</li> </ul>

#### Poziom (W)

Uczeń otrzymuje ocenę **celującą**, jeśli opanował wiedzę i umiejętności z poziomów (K)–(D) oraz:

<ul style="list-style-type: none"> <li>przekształca wzór funkcji danej w postaci <math>f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}</math> do postaci <math>f(x) = \frac{r}{x-p} + q</math> oraz szkicuje jej wykres</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje funkcje i wyrażenia wymierne do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności</li> </ul>

## 2. TRYGNOMETRIA

#### Poziom (K) lub (P)

Uczeń otrzymuje ocenę **dopuszczającą** lub **dostateczną**, jeśli:

<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenie Pitagorasa w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystuje wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów: <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math>, <math>60^\circ</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>odczytuje z tablic miarę kąta ostrego, gdy zna wartość jego funkcji trygonometrycznej</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dany jest sinus lub cosinus kąta</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>rozwiązuje trójkąty prostokątne w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania prostych zadań praktycznych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu; przedstawia ten kąt na rysunku</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje wzory: <math>\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha</math>, <math>\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha</math>, <math>\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha</math> do obliczania wartości wyrażenia</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>stosuje w zadaniach wzór na pole trójkąta: <math>P = \frac{1}{2}ah</math> oraz wzór na pole trójkąta równobocznego o boku <math>a</math>:  <math display="block">P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}</math> </li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>rozdziela czworokąty: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez oraz zna ich własności</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>oblicza pola czworokątów</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wykorzystuje funkcje trygonometryczne do obliczania obwodów i pól podstawowych figur płaskich w prostych przypadkach</li> </ul>

#### Poziom (R) lub (D)

Uczeń otrzymuje ocenę **dobrą** lub **bardzo dobrą**, jeśli opanował poziomy (K) i (P) oraz dodatkowo:

<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznacza długości odcinków w trójkącie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w bardziej złożonych sytuacjach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>uzasadnia proste zależności, korzystając z własności funkcji trygonometrycznych</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania trójkątów w zadaniach praktycznych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje poznane związki do upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• uzasadnia związki między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych <math>\alpha</math> i <math>90^\circ - \alpha</math></li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wyprowadza wzór na jedynekę trygonometryczną oraz pozostałe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• przekształca wyrażenia trygonometryczne, stosując związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dany jest tangens kąta; znając wartość tangensa kąta wypukłego, rysuje ten kąt w układzie współrzędnych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności wzór na pole trójkąta:  <math display="block">P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma</math> </li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje wzór Herona do obliczania pola trójkąta</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza pola czworokątów w trudniejszych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wykorzystuje umiejętność wyznaczania pól trójkątów do obliczania pól innych wielokątów</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• uzasadnia związki miarowe w czworokątach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• dowodzi prawdziwości wzoru <math>P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma</math></li> </ul>

#### Poziom (W)

Uczeń otrzymuje ocenę **celującą**, jeśli opanował wiedzę i umiejętności z poziomów (K)–(D) oraz:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• przeprowadza dowód twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje zadania o znacznym stopniu trudności z zastosowaniem trygonometrii, w tym zadania na dowodzenie związków miarowych w trójkątach i czworokątach</li> </ul>

### 3. PLANIMETRIA

#### Poziom (K) lub (P)

Uczeń otrzymuje ocenę **dopuszczającą** lub **dostateczną**, jeśli:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozpoznaje kąty środkowe w okręgu</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza długość okręgu i długość łuku okręgu w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• określa wzajemne położenie dwóch okręgów, gdy dane są promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza pole koła i pole wycinka koła</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza pole figury, stosując wzór na pole koła, i pole wycinka koła w prostych sytuacjach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość jego środka od prostej z promieniem okręgu</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozpoznaje kąty wpisane w okrąg oraz wskazuje łuki, na których są one oparte</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie równobocznym lub prostokątnym</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na dowolnym trójkącie w zadaniach z planimetrii w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny lub prostokątny</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w dowolny trójkąt w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• opisuje własności wielokątów foremnych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza miarę kąta wewnętrznego danego wielokąta foremnego</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wyznacza liczbę boków wielokąta foremnego, znając sumę miar jego kątów wewnętrznych</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• oblicza promień okręgu opisanego na wielokącie foremnym i wpisanego w wielokąt foremnym w prostych przypadkach</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania trójkątów w prostych przypadkach, także osadzonych w kontekście praktycznym</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów w prostych przypadkach, także osadzonych w kontekście praktycznym</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• wskazuje najmniejszy (największy) kąt w trójkącie, znając długości boków trójkąta</li> </ul>

### Poziom (R) lub (D)

Uczeń otrzymuje ocenę **dobrą** lub **bardzo dobrą**, jeśli opanował poziomy (K) i (P) oraz dodatkowo:

• wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań w trudniejszych przypadkach
• oblicza pole figury, stosując wzory na pole koła i pole wycinka kołowego
• wykorzystuje twierdzenie o odcinkach stycznych do rozwiązywania zadań
• stosuje twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia w trudniejszych przypadkach
• stosuje twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu do rozwiązywania zadań w trudniejszych przypadkach
• stosuje twierdzenie o cięciwach do wyznaczania długości odcinków w okręgach
• stosuje wzory $P = \frac{abc}{4R}$ i $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ do obliczania pola trójkąta
• uzasadnia wzory $P = \frac{abc}{4R}$ i $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$
• bada, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny
• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie
• rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt
• stosuje twierdzenie sinusów i cosinusów do rozwiązywania trójkątów oraz do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym

### Poziom (W)

Uczeń otrzymuje ocenę **celującą**, jeśli opanował wiedzę i umiejętności z poziomów (K)–(D) oraz:

• udowadnia zależności w wielokątach foremnych o podwyższonym stopniu trudności
• zna i potrafi wykonać konstrukcję pięciokąta foremnego
• przeprowadza dowód twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym w okręgu oraz o kątach wpisanych, opartych na tym samym łuku
• przeprowadza dowód twierdzenia o cięciwach w okręgu
• uzasadnia zależność między długością boku a promieniem okręgu opisanego na wielokącie foremnym lub wpisanego w wielokąt foremny
• przeprowadza dowód twierdzenia sinusów i dowód twierdzenia cosinusów
• rozwiązuje zadania z planimetrii z zastosowaniem trygonometrii o podwyższonym stopniu trudności
• udowadnia, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie
• udowadnia, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie

## 4. FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA

### Poziom (K) lub (P)

Uczeń otrzymuje ocenę **dopuszczającą** lub **dostateczną**, jeśli:

• zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym
• oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych
• zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o podanej podstawie i wykładniku rzeczywistym
• upraszcza wyrażenia, stosując twierdzenia o działaniach na potęgach – w prostych przypadkach
• oblicza wartości danej funkcji wykładniczej dla podanych argumentów
• sprawdza, czy podany punkt należy do wykresu danej funkcji wykładniczej
• wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie współrzędnych punktu należącego do jej wykresu oraz szkicuje ten wykres
• szkicuje wykres funkcji wykładniczej i podaje jej własności
• szkicuje wykres funkcji, stosując przesunięcie wykresu odpowiedniej funkcji wykładniczej wzdłuż osi układu współrzędnych albo przez symetrię względem osi układu współrzędnych, i podaje jej własności
• oblicza logarytm danej liczby
• stosuje równości wynikające z definicji logarytmu – do prostych obliczeń
• odczytuje z tablic przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych
• stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami – w prostych przypadkach
• szkicuje wykres funkcji logarytmicznej i określa jej własności

● wyznacza wzór funkcji logarytmicznej, gdy dane są współrzędne punktu należącego do jej wykresu
● wyznacza zbiór wartości funkcji logarytmicznej o podanej dziedzinie – w prostych przypadkach
● szkicuje wykres funkcji, stosując przesunięcie wykresu odpowiedniej funkcji logarytmicznej wzdłuż osi układu współrzędnych albo symetrię względem osi układu współrzędnych
● rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym, korzystając z własności funkcji wykładniczej lub funkcji logarytmicznej – w prostych przypadkach

#### Poziom (R) lub (D)

Uczeń otrzymuje ocenę **dobrą** lub **bardzo dobrą**, jeśli opanował poziomy (K) i (P) oraz dodatkowo:

● upraszcza wyrażenia, stosując twierdzenia o działaniach na potęgach – w trudniejszych przypadkach
● porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej – w trudniejszych przypadkach
● szkicuje wykres funkcji, stosując złożenie przekształceń
● odczytuje z wykresu funkcji wykładniczej zbiór rozwiązań nierówności
● wyjaśnia, jak należy przekształcić wykres funkcji, aby otrzymać wykres innej funkcji
● wyznacza podstawę logarytmu lub liczbę logarytmowaną, gdy dana jest wartość logarytmu; podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu i liczby logarytmowanej
● stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń
● odczytuje z wykresu funkcji logarytmicznej zbiór rozwiązań nierówności
● wykorzystuje własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym, np. dotyczących wzrostu wykładniczego i rozpadu promieniotwórczego
● rozwiązuje zadania dotyczące monotoniczności funkcji logarytmicznej, w tym zadania z parametrem
● udowadnia twierdzenie dotyczące niewymierności liczby, np. $\log_2 3$

#### Poziom (W)

Uczeń otrzymuje ocenę **celującą**, jeśli opanował wiedzę i umiejętności z poziomów (K) – (D) oraz:

● rozwiązuje zadania o znacznym stopniu trudności dotyczące funkcji wykładniczej i logarytmicznej
● udowadnia twierdzenia o działaniach na logarytmach

